Günther Malle
Universität für Bildungswissenschaften, Klagenfurt

PROBLEMLÖSEPROZESSE IM MATHEMATIKUNTERRICHT

1. Beschreibung von Problemlöseprozessen - Heuristik

Praktisch jeder, der mit Mathematik zu tun hat, muß Probleme lösen. Obwohl es sich dabei um ein beinahe alltägliches Phänomen handelt, weiß man über die Prozesse, die sich dabei abspielen, sehr wenig. Dabei wäre es für die Mathematikdidaktik von größter Wichtigkeit, mehr über diese Prozesse zu wissen. Denn ein besseres Wissen würde dem Lehrer helfen, die im Schüler ablaufenden Vorgänge besser zu begreifen und zu steuern.

Warum lassen sich Problemlöseprozesse eigentlich so schwer beschreiben?

Der Grund liegt vor allem darin, daß unser Denken zum größten Teil unbewußt abläuft. Jeder kennt dieses Phänomen, daß man über ein Problem nachdenkt und daß plötzlich - ohne daß man recht weiß, wie einem geschieht - die Lösung da ist (Aha-Erlebnis nach K. BÜHLER). Die Denkpsychologen versuchen seit Jahrzehnten, die unbewußten Prozesse während des Lösens eines Problems ans Licht zu zerren. Sie bedienen sich dabei vor allem zweier Methoden:

- *Selbstbeobachtung:* Jeder Denkschritt wird sofort und möglichst bewußt reflektiert. Ein Nachteil dieser Methode besteht darin, daß die Reflexion den Problemlöseprozeß stören kann.
- *Klinische Methode:* Eine Versuchsperson erhält ein Problem gestellt und muß während der Lösung laut denken und möglichst alles sagen, was in ihr vorgeht. Meist werden die Aussagen protokolliert oder auf Band aufgenommen und anschließend ausgewertet.

Mit beiden Methoden läßt sich natürlich nur ein kleiner Teil der unbewußt ablaufenden Vorgänge erhaschen, vieles läuft immer noch unbemerkt ab. Bis jetzt ist es mit diesen Methoden nur gelungen, ganz einfache Problemlöseprozesse (etwa die Lösung einfacher Denksportaufgaben) zu untersuchen. Bei komplexeren Problemen, wie sie üblicherweise in der Mathematik auftreten, kam man nicht sehr weit. Daher haben die Ergebnisse der Denkpsychologie auch nur wenige für den Mathematikunterricht verwertbare Ergebnisse gebracht.

Wenn man mehr über mathematische Problemlöseprozesse erfahren will, ist man daher besser dran, sich an Mathematiker selbst zu halten, die sich für solche psychologischen Fragen interessiert und sich darüber geäußert haben. Solche gibt es in der Geschichte der Mathematik einige. (Wir werden später einige Namen aufzählen.) Alle diese Mathematiker sind sich im wesentlichen darüber einig, daß es beim Lösen mathematischer Probleme nicht so zugeht, wie viele Leute das von einem Mathematiker erwarten, nämlich logisch und geordnet. Vielmehr geht es dabei unlogisch und ungeordnet (und manchmal höchst merkwürdig) zu. Die Mathematik besitzt eben neben ihrer bekannten Seite, nämlich der logisch-deduktiven, axiomatischen, strengen Seite, noch eine andere, weniger bekannte Seite, in der es weder logisch, noch deduktiv, noch axiomatisch, noch streng zugeht. Nach [POLYA 1962] ist es heute üblich, zwei Arten des Schließens zu unterscheiden:

a) *Deduktives (demonstratives) Schließen*
b) *Plausibles Schließen*

Jeder von uns wurde in einer längeren Universitätsausbildung ausführlich mit dem deduktiven Schließen bekanntgemacht. Über das plausible Schließen aber hat uns kaum jemand etwas erzählt. Manche Mathematiker reden nicht gerne von diesem Wesenszug ihrer Wissenschaft. Jemand hat einmal behauptet: so mancher Mathematiker, der zugeben muß, wie er zu einem Resultat gekommen ist, kommt sich vor, als stünde er in Unterhosen da. Wie die Universitätsausbildung, so ist auch der heutige Wissenschaftsbetrieb. Man sehe sich die mathematischen Zeitschriften an: nur die Resultate zählen, wie man auf die gekommen ist, ist Privatsache.

Trotz des Intimcharakters mathematischer Problemlöseprozesse möchte ich mich nicht scheuen, darüber zu sprechen. Die folgenden Ausführungen sollen einige Geschmacksproben abgeben und zur weiteren Beschäftigung mit diesem Gebiet anregen.

Das Gebiet, von dem die Rede ist, also die Lehre vom plausiblen Schließen, wird auch als Heuristik bezeichnet. (Laut Brockhaus ist dies die "Lehre von den Wegen zur Gewinnung wissenschaftlicher Erkenntnisse".) Bei genauerem Hinsehen erweist sich die Heuristik als eine sehr alte Wissenschaft. Sie war früher unter dem Namen "ars inveniendi" ein verbreitetes, interdisziplinäres Arbeitsgebiet. Bereits bei PAPPUS (einem Kommentator EUKLIDS um 300 n. Chr.) finden wir eine ausführliche Darstellung der Heuristik, später auch bei DESCARTES (1596-1650), LEIBNIZ (1646-1716) und BOLZANO (1781-1848). Dann geriet die Heuristik merkwürdigerweise in Vergessenheit, wohl dadurch begründet, daß man sich seit Beginn des 18. Jahrhunderts verstärkt der logisch-deduktiven Fundierung der Mathematik zuwandte. (Eine Ausnahme war HADAMARD (1865-1963).) Im 20. Jahrhundert wurde die Heuristik durch POLYA wiederentdeckt, dessen Arbeiten zur Heuristik eine Flut weiterer Publikationen zu diesem Thema auslösten. (Bezüglich weiterer Informationen zur Heuristik sei der interessierte Leser auf [FISCHER-MALLE 1978] und [TIETZE 1978] sowie die in diesen Arbeiten zitierte Literatur verwiesen. Empfehlenswert sind auch [VAN DER WAERDEN 1973] und [WICKELGREN 1974].)

2. Einige Problemlösestrategien

Das vordringlichste Anliegen der Heuristik ist es, Strategien zum Problemlösen zu entwerfen. Man kann diese Strategien grob gesehen in zwei Gruppen einteilen:

a) *Allgemeine heuristische Verfahren*, die in der Mathematik universell verwendbar sind.

b) *Spezifische Verfahren bzw. Regeln*, die an ein bestimmtes Stoffgebiet gebunden sind.

Im folgenden sollen nur einige allgemeine Verfahren besprochen werden: Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Generalisieren, Spezialisieren, Analogisieren und die Betrachtung von Grenzfällen.

2.1 Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten

Beim *Vorwärtsarbeiten* geht man von der Voraussetzung schrittweise zur Behauptung bzw. vom Gegebenen zum Gesuchten bzw. vom Bekannten zum Unbekannten (Fig. 1)

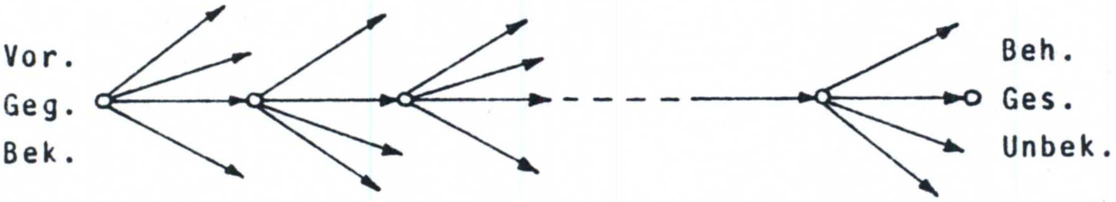

Fig. 1

Man geht etwa von der Voraussetzung aus, schließt daraus etwas, schließt aus dem wieder etwas usw., bis man - wenn man Glück hat - zur Behauptung kommt. Man folgt also der Pfeilrichtung in Fig. 1. Bei jedem Schritt gibt es aber im allgemeinen viele (u.U. unendlich viele) Möglichkeiten, weiterzuschreiten. Bei jedem Schritt ist daher eine Auswahl zu treffen und diese ist stets mit einem Risiko verbunden. Wenn man ungünstig auswählt, kann man zu sehr in die Irre gehen und hat keine Chance mehr, zur Behauptung zu kommen. Die Methode liefert also keinerlei Gewähr für die Lösung des vorliegenden Problems.

Beim *Rückwärtsarbeiten* geht man von der Behauptung schrittweise zur Voraussetzung bzw. vom Gesuchten zum Gegebenen bzw. vom Unbekannten zum Bekannten (Fig. 2)

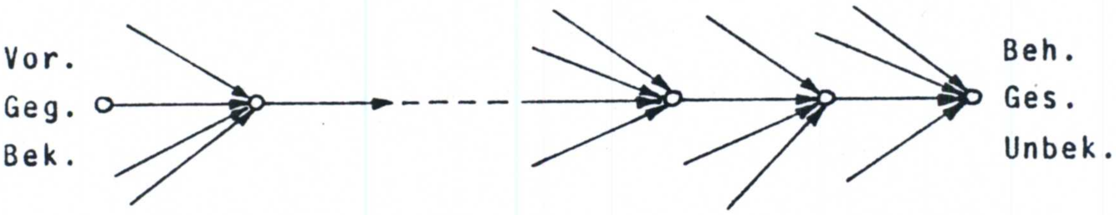

Fig. 2

Man sucht etwas, aus dem sich die Behauptung schließen läßt, dann etwas, aus dem sich dieses schließen läßt usw., bis man - wenn man Glück hat - zur Voraussetzung kommt.

Man folgt also der Gegenpfeilrichtung in Fig. 2. Auch hier gibt es im allgemeinen bei jedem Schritt viele Möglichkeiten, zurückzuschreiten. Bei jedem Schritt ist eine Auswahl zu treffen, die mit einem Risiko verbunden ist, und auch hier ist keine Gewähr für die Lösung des vorliegenden Problems gegeben.

Es ist auch ein kombiniertes Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten in mannigfacher Weise möglich, z.B. wie in Fig. 3.

Fig. 3

<u>Beispiel:</u> Man zeige, daß die drei Seitensymmetralen eines Dreiecks sich in einem Punkt schneiden (Fig. 4).

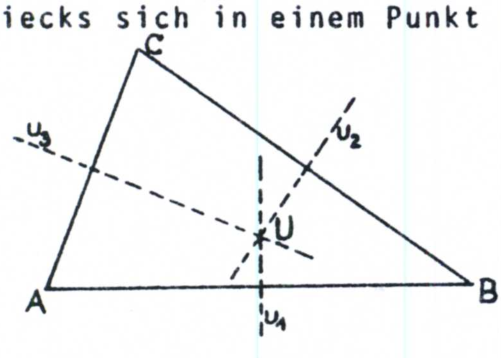

Fig. 4

Wir stellen Voraussetzung und Behauptung übersichtlich zusammen:

Voraussetzung: u_1, u_2, u_3 sind Seitensymmetralen des Dreiecks ABC.

Behauptung: u_1, u_2, u_3 schneiden sich in einem Punkt.

Lösung durch Vorwärtsarbeiten: Was kann ich aus der Voraussetzung folgern? (Die wesentliche Idee dieses Beweises ist, daß man sich der Definition der Seitensymmetrale entsinnt.) Ich kann folgern, daß alle Punkte auf u_1 von A und B gleich weit entfernt sind und alle Punkte auf u_2 von B und C gleich weit entfernt sind. Daraus kann ich folgern: Für den Schnittpunkt von u_1 und u_2 - nennen wir ihn U - gilt $\overline{UA} = \overline{UB}$ und $\overline{UB} = \overline{UC}$. Daraus folgt $\overline{UA} = \overline{UC}$. Daraus folgt, daß U auf u_3 liegt. Daraus folgt die Behauptung.

Lösung durch Rückwärtsarbeiten: Woraus könnte ich die Behauptung folgern? Nun, ich müßte zeigen, daß der Schnittpunkt U von u_1 und u_2 auch auf u_3 liegt. Wie kann ich das zeigen? Nun, ich müßte zeigen, daß $\overline{UA} = \overline{UC}$. Wie kann ich das zeigen? Nun, wenn ich $\overline{UA} = \overline{UB}$ und $\overline{UB} = \overline{UC}$ zeigen könnte, wäre ich fertig. Aber das gilt aufgrund der Voraussetzung.

Auch ein *kombiniertes Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten* ließe sich an diesem Beispiel illustrieren (siehe [FISCHER-MALLE 1978]).

Ist ein Beweis - wie auch immer - gefunden, kann dieser in logisch-deduktiver (demonstrativer) Darstellung wiedergegeben werden, etwa so:

Sei U der Schnittpunkt von u_1 und u_2. Dann gilt:

$$U \in u_1 \wedge U \in u_2 \Longrightarrow \overline{UA} = \overline{UB} \wedge \overline{UB} = \overline{UC} \Longrightarrow \overline{UA} = \overline{UC} \Longrightarrow U \in u_3$$

Somit schneiden sich u_1, u_2, u_3 in U.

Man sieht, wie kurz diese demonstrative Darstellung des Beweises im Vergleich zu den Gedankengängen ist, durch die er wirklich gefunden wurde und wie falsch es wäre, im Unterricht den Schülern nur diese demonstrative Darstellung anzubieten. Der Schüler hätte dann nur einen weiteren geometrischen Satz kennengelernt, aber fast nichts über Beweisen und Problemlösen gelernt.

2.2 Generalisieren

Manchmal ist ein Problem leichter zu lösen, wenn man es verallgemeinert.

Beispiel: Nehmen wir an, die Schüler können Polynomfunktionen differenzieren, aber noch nicht rationale Funktionen. Es wird ihnen die Aufgabe gestellt, die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{x^3+x-1}{x^2+1}$$

zu differenzieren.

Zur Not könnte man diese Aufgabe lösen, indem man auf die Definition des Differentialquotienten zurückgreift. Leichter aber ist es, das Problem zu verallgemeinern und gleich nach der Ableitung einer Funktion

$$f = \frac{u}{v}$$

zu fragen, wobei u und v differenzierbare Funktionen sind. Das Problem reduziert sich dann auf die wohlbekannte Herleitung der Quotientenregel.

2.3 Spezialisieren

Manchmal ist ein Problem leichter zu lösen, wenn man zuerst versucht, einen Spezialfall zu lösen.

Beispiel (siehe [BALK 1971] und [TIETZE 1978]): Man zeige, daß für jeden Punkt P am Rand oder im Inneren eines gleichseitigen Dreiecks die Summe der Abstände von den Seiten denselben Wert ergibt!

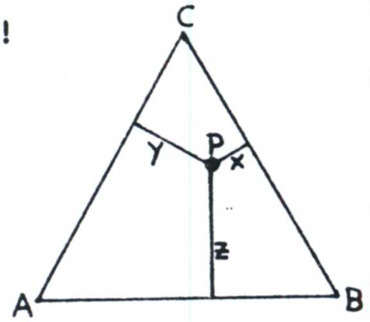

Fig. 5

Um die Darstellung zu vereinfachen, führen wir folgende Bezeichnungsweise ein: $S_{ABC}(P) = x + y + z$ (siehe Fig. 5)

Wir müssen zeigen, daß $S_{ABC}(P)$ konstant, d.h. unabhängig von der Lage von P ist. Wir lösen das Problem zuerst in einigen Spezialfällen.

1. Spezialfall: P liege auf einem Eckpunkt des Dreiecks ABC (Fig. 6). In diesem Fall gilt $\underline{S_{ABC}(P)} = z = \underline{h}$, wobei h die Höhe des Dreiecks ABC ist. (Damit haben wir eine Vermutung über den Wert von $S_{ABC}(P)$ bei beliebiger Lage von P.)

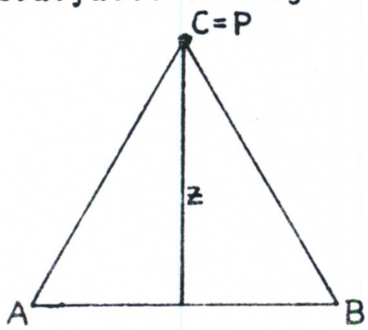

Fig. 6

2. Spezialfall: P liege auf einer Seite des Dreiecks ABC (Fig. 7). Dieser Spezialfall kann auf den vorigen Spezialfall zurückgeführt werden, wenn man eine Parallele durch P zur Seite [A,C] zieht. Dann gilt

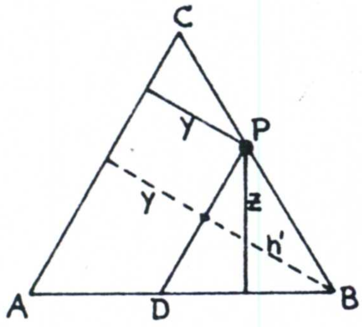

Fig. 7

$\underline{S_{ABC}(P)} = S_{DBP}(P)+y = h'+y = \underline{h}$,

wobei h' die Höhe des Dreiecks DBP ist.

Allgemeiner Fall: P liege irgendwo auf dem Rand oder im Inneren des Dreiecks ABC (Fig. 8). Dieser Fall kann auf den zweiten Spezialfall zurückgeführt werden, wenn man eine Parallele durch P zur Seite [B,C] zieht. Dann gilt

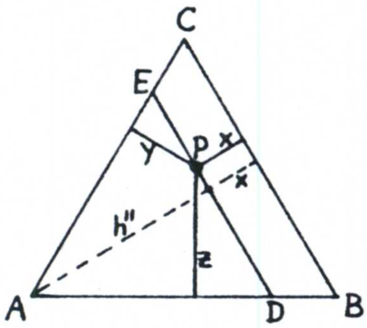

Fig. 8

$\underline{S_{ABC}(P)} = S_{ADE}(P)+x = h''+x = \underline{h}$,

wobei h" die Höhe des Dreiecks ADE ist.

2.4 Analogisieren

Manchmal ist es leichter, ein Problem zu lösen, wenn man zuerst ein analoges Problem löst.

Beispiel (nach [BALK 1971]): Man leite eine Formel für einen Ankreisradius eines Dreiecks mit den Seitenlängen a,b,c her! Wir lösen zuerst ein analoges Problem, nämlich die Herleitung einer Formel für den Inkreisradius eines Dreiecks mit den Seitenlängen a,b,c. Dann versuchen wir, die Lösung schrittweise vom analogen Problem auf das ursprüngliche Problem zu übertragen.

Analoges Problem:

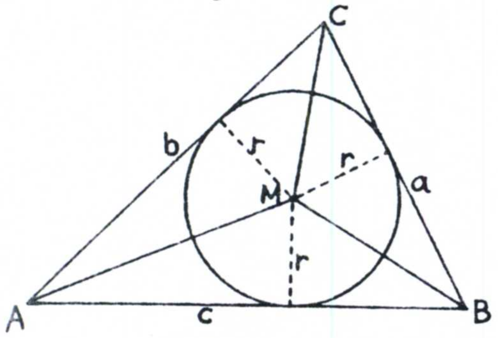

Fig. 9

1. Wir verbinden den Inkreismittelpunkt M mit den Eckpunkten des Dreiecks.
2. Für den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC gilt:

$$A = A_{AMC} + A_{ABM} + A_{BCM} =$$
$$= \frac{b.r}{2} + \frac{c.r}{2} + \frac{a.r}{2} =$$
$$= r \;.\; \frac{a+b+c}{2} = r.s$$

3. Unter Benutzung der Heronschen Flächenformel folgt:

$$\underline{r} = \frac{A}{s} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} =$$
$$= \underline{\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}}$$

Ursprüngliches Problem:

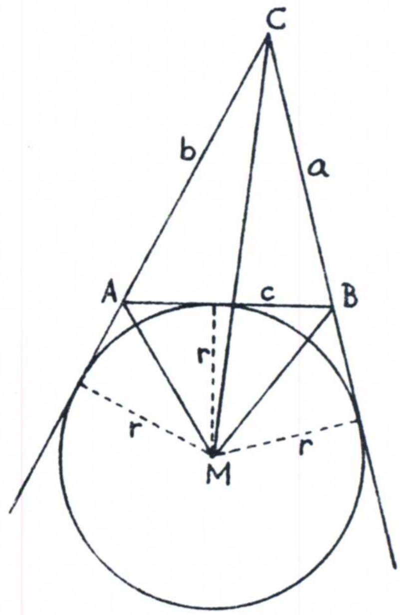

Fig. 10

1. Wir verbinden den Ankreismittelpunkt M mit den Eckpunkten des Dreiecks.
2. Für den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC gilt:

$$A = A_{AMC} + A_{CMB} - A_{AMB} =$$
$$= \frac{b.r}{2} + \frac{a.r}{2} - \frac{c.r}{2} =$$
$$= r \;.\; \frac{a+b-c}{2} = r(s-c)$$

3. Unter Benutzung der Heronschen Flächenformel folgt:

$$\underline{r} = \frac{A}{s-c} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s-c}$$
$$= \underline{\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}}$$

Während die Methode des Vorwärts- bzw. Rückwärtsarbeitens sich vorwiegend zur Lösung bereits fertig formulierter Probleme eignet, eignen sich die Methoden des Generalisierens, Spezialisierens und Analogisierens auch vorzüglich zum Auffinden von Vermutungen. Alle drei dieser Methoden können oft bei der Lösung eines Problems in charakteristischer Weise zusammenwirken. (Siehe dazu [FISCHER-MALLE 1978], wo dieses Zusammenwirken an einem Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes erläutert wird!)

2.5 Betrachtung von Grenzfällen

Als Grenzfälle seien hier Extremfälle oder auch besonders ausgezeichnete Fälle verstanden. Manchmal ist ein Problem leichter zu lösen, wenn man zuerst Grenzfälle betrachtet.

Beispiel (nach [BALK 1971]): Gegeben sei ein beliebiges Viereck (Fig. 11). Wir verbinden die Mittel-Punkte M,N der Seiten [A,D] und [B,C]. Was ist größer: $\overline{MN}$ oder $\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{DC})$?

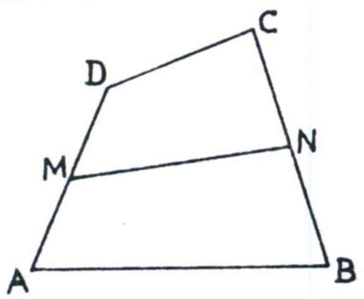

Fig. 11

Wir betrachten zuerst den *Grenzfall*, daß zwei Eckpunkte, etwa C und D, zusammenfallen (Fig. 12). In diesem Fall folgt mit Hilfe des Strahlensatzes:

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$$

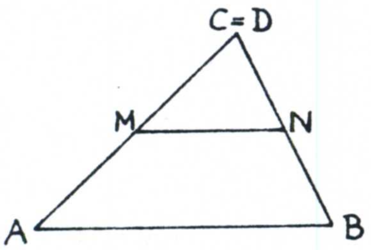

Fig. 12

Der allgemeine Fall kann nun auf den Grenzfall zurückgeführt werden. In Fig. 13 wird das Viereck durch die Diagonale [B,D] in zwei Dreiecke zerlegt. Zeichnet man noch die Strecken [M,K] ‖ [A,B] und [K,N] ‖ [D,C] ein, so entspricht jedes der beiden Dreiecke ABD und CDB dem Grenzfall. Es gilt daher:

$$\overline{MK} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$$

$$\overline{KN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DC}$$

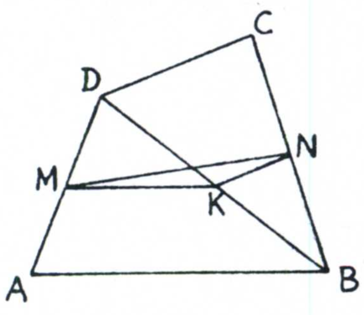

Fig. 13

Daraus folgt:

$$\underline{\overline{MN} \leq \overline{MK} + \overline{KN} = \frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{DC})}\ ,$$

womit das Problem gelöst ist. Wir können sogar mehr sagen: Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $[M,N] \parallel [A,B]$, d.h. wenn das Viereck ABCD ein Trapez mit den Parallelseiten [A,B] und [D,C] ist.

Um auf Grenzfälle zu stoßen, ist eine Strategie von Vorteil, nämlich das Variieren von Bedingungen, z.B. das Variieren von Angaben. Im vorliegenden Problem heißt das, daß man verschiedene Vierecke aufzeichnen und spielerisch probieren soll. Vielleicht stößt man dann eher auf den betrachteten Grenzfall, der zur Lösung des Problems verhilft.

Man könnte die Liste der hier angeführten Strategien zum Problemlösen noch sehr lange fortsetzen. Der interessierte Leser sei insbesondere auf [POLYA 1967] verwiesen, wo weitere Strategien angeführt und an Beispielen aus der Schulmathematik illustriert werden.

4. Empirische Untersuchungen

In neuester Zeit hat man versucht, Problemlöseprozesse mit "wissenschaftlicheren" Mitteln zu untersuchen, insbesondere versuchte man, mit Hilfe der Faktorenanalyse Problemlösestrategien systematischer auszufiltern. Dazu gibt es einige Untersuchungen. Die Basis der meisten dieser Arbeiten ist die Dissertation von KILPATRICK ([KILPATRICK 1967]), einem Schüler von POLYA. Er stellte Schülern Problemaufgaben und wandte die oben beschriebene klinische Methode an. Bei der Auswertung versuchte er, mit Hilfe der Faktorenanalyse einzelne Strategien (Faktoren) voneinander zu scheiden. (Im wesentlichen besteht diese Methode darin, daß mit mathematischen Mitteln Strategien, die untereinander hoch korrellieren, zu einer Klasse zusammengefaßt werden. Es bleiben also nur mehr Faktoren übrig, die untereinander wenig korrellieren. Eine Gewichtszahl gibt jeweils an, wie stark der betreffende Faktor beim Problemlösen beteiligt ist.) Auf diese Weise ergaben sich bei KILPATRICK 41 Problemlösestrategien (sog. "Problemlösefaktoren").

Es ist für faktorenanalytische Untersuchungen typisch, daß bei verschiedenen Untersuchungen zum selben Gegenstand die Anzahl der Faktoren stark schwankt. (Die Unterschiede sind erklärbar durch Verschiedenheiten der gestellten Aufgaben, der Versuchspersonen und der mathematischen Methoden in der Auswertung; man darf also in den verschiedenen Ergebnissen nicht unbedingt Widersprüche sehen.) So ergaben sich in einer anderen Untersuchung von WEBB ([WEBB 1975]) nur 5 Faktoren, wobei der fünfte Faktor so geringes Gewicht hat, daß er meist weggelassen wird. Die ersten vier Faktoren sind in der Reihenfolge ihrer Gewichtung:

1. Faktor: *"Bildhafte Darstellung"* (Benutzen von Skizzen und Graphen, Einzeichnen von Hilfslinien etc.)
2. Faktor: *"Kreative Kontrolle"* (Eigenständige Methoden beim Überprüfen der Ergebnisse, z.B. Nachprüfen an Spezialfällen oder Lösen auf eine andere Art, stures Nachrechnen fällt nicht darunter.)
3. Faktor: *"Konkretes Vorgehen"* (Systematisches Einsetzen von Zahlen, physikalische Interpretationen etc.)
4. Faktor: *"Plötzlicher Einfall"*

Der vierte Faktor kann wohl kaum mehr als Strategie angesehen werden, eher ist er ein charakteristisches Merkmal des Problemlöseprozesses. (Jeder Problemlöseprozeß beinhaltet eine schöpferische Idee, sie ist nur manchmal größer, manchmal kleiner.) Es ist fraglich, ob dieser vierte Faktor lehrbar ist. (Die ersten drei Faktoren können jedoch sicher vom Lehrer gefördert werden.)

WEBB hat in seiner Untersuchung übrigens auch drei Problemlösetypen eruiert: den Impulsiven, den Sorgfältigen und den Variationsreichen (der letztere verwendet ein reichhaltiges Arsenal heuristischer Strategien). Die Kenntnis dieser Typologie dürfte dem Lehrer nicht allzuviel nützen. (Sie nützt wahrscheinlich soviel wie die Kenntnis, daß man Schüler dem Körperbau nach in Leptosome, Pykniker und Athletiker bzw. in die zugeordneten schizothymen, zyklothymen und viskösen Temperamente einteilen kann.) Wesentlicher aber scheint die aus dieser Typologie erfließende Erkenntnis zu sein, daß Problemlösen nicht nur ein *kognitives*, sondern auch ein *affektives* Problem ist, das eng mit Persönlichkeitsmerkmalen wie Impulsivität, Sorgfalt (auch Angstverhalten), Flexibilität usw. zusammenhängt. Schüler zu guten Problemlösern zu machen, kann also kaum dadurch erreicht werden, daß man nur demonstrative Mathematik mit ihnen betreibt.

Weitere Informationen über empirische Untersuchungen von Problemlöseprozessen findet man bei [ZIMMERMANN 1979] und [TIETZE 1978] sowie der dort zitierten Literatur.

5. Lehren von Heuristik

Kann man Heuristik lehren? Genauer: Kann ein Lehrer heuristische Aktivitäten in den Schülern erwecken und kann er die ablaufenden Prozesse steuern? Es scheint eine Binsenweisheit zu sein, daß zu einem solchen Lehren nur ein Lehrer fähig ist, der sich selbst mit heuristischen Aktivitäten vertraut gemacht hat. Dies ist notwendig, aber nicht hinreichend. Es scheint mir, daß eine Reihe weiterer Bedingungen erfüllt sein müssen. Der Bereich des Lehrens von Heuristik ist noch sehr wenig erforscht, trotzdem seien im folgenden fünf Punkte angeführt, die mir für erfolgreiches Lehren von Heuristik wesentlich erscheinen. (Es konnte empirisch nachgewiesen werden, daß keiner dieser Punkte derzeit in der AHS in nennenswertem Ausmaß erfüllt wird; siehe dazu [PESCHEK 1979].)

a) Wenn man haben will, daß Schüler gute Problemlöser werden, muß man ihnen reichhaltig Problemaufgaben stellen. Damit sind nicht bloße Routineaufgaben gemeint, sondern anspruchsvollere Aufgaben (die höhere taxonomische Niveaus erfordern). Das heißt nicht unbedingt, daß diese Aufgaben sehr schwierig sein müssen, aber sie müssen dem Schüler genügend Gelegenheit zur Selbsttätigkeit geben. Meiner Meinung nach kann man

Problemlösefähigkeiten auf jeder Stufe - von der Volksschule bis zur Universität - an geeigneten Aufgaben schulen.

b) Heuristische Strategien müssen bewußt reflektiert werden. Jedermann eignet sich im Lauf seines Lebens mehr oder weniger unbewußt gewissen Strategien zum Problemlösen an. Es genügt aber in der Schule nicht, darauf zu vertrauen, daß sich diese Strategien von selbst entwickeln, sondern sie müssen bewußt gemacht werden und es muß über sie gesprochen werden. Am besten geht man dabei wohl so vor, daß im Anschluß an ein gelöstes Beispiel die Lösung rückschauend diskutiert wird. Man fragt sich z.B.: Wie sind wir eigentlich auf die Lösung gekommen? Welche Strategien haben geholfen? Usw. Nur wenn dies immer wieder gemacht wird, kann man hoffen, daß diese Strategien nach und nach in den Besitz der Schüler übergehen. (Eine wirkungslose Methode, Heuristik zu lehren, wäre die, Strategien in Form eines eigenen Lehrstoffes aufzuzählen und vielleicht sogar abzuprüfen.)

c) Heuristische Tätigkeiten brauchen Zeit. Die Schüler müssen beim Lösen von Problemen genügend Zeit haben, um verschiedene Strategien auszuprobieren. Ein Lehrer, der immer einen vorgefaßten Lösungsweg durchdrückt, wird das angestrebte Ziel nicht erreichen. Ich weiß, daß die Forderung nach Zeitlassen im Widerspruch zum Stoffdruck des Lehrplans steht. Aber diese Situation kann derzeit kaum geändert werden, weil die meisten Lehrer (und mit ihnen die Lehrplangremien) die Erfüllung eines Lehrplans nur in inhaltlicher Hinsicht sehen. Erst wenn sich im Bewußtsein der Lehrer die Meinung breiter durchgesetzt haben wird, daß solche Dinge wie Heuristik auch zum Mathematikunterricht gehören, wird sich eine Stoffentlastung ergeben. Vorläufig kann die persönliche Lösung für jeden einzelnen nur lauten: Mut zur Lücke!
Wer müßte eigentlich eher ein schlechtes Gewissen haben, derjenige, der die Schüler nicht im Problemlösen schult oder derjenige, der ein bestimmtes Stoffkapitel nicht mehr durchdrücken kann, weil das Schuljahr zu Ende ist?

d) Heuristische Tätigkeiten erfordern Unterrichtsformen, in denen die Selbsttätigkeit der Schüler gesichert ist. Dozierender Frontalunterricht ist dazu ungeeignet.

e) Der Einsatz von Unterrichtsmitteln ist möglich. Z.B. hat man in der DDR Versuche mit sog. "heuristischen Checklisten" gemacht. Diese bestehen darin, daß zu einem bestimmten Problem bestimmte Strategien als Hilfestellungen angeboten werden, z.B.:
   - Welche Spezialfälle gibt es? Versuche zuerst, das Problem in Spezialfällen zu lösen!
   - Kennst du ein ähnliches Problem, das du lösen kannst? Versuche die Lösung zu übertragen!

   Usw. Genaueres darüber findet man in [STEINHÖFEL-REICHOLD 1973] oder [TIETZE 1978].

Weiteres zum Thema des Lehrens von Heuristik findet man in [FISCHER-MALLE 1978] sowie der dort zitierten Literatur.

Zum Abschluß stellen wir noch die Frage: Zahlt sich der ganze Aufwand überhaupt aus? Wirkt sich ein Lehren von Heuristik überhaupt positiv aus? Dazu gibt es einige interessante empirische Untersuchungen (die in [TIETZE 1978] beschrieben sind). Man hat Klassen, die ohne Heuristik unterrichtet wurden, mit Klassen verglichen, die mit Heuristik unterrichtet wurden. Die Ergebnisse zeigten - zum Teil recht eindeutig - daß die Leistungsfähigkeit der Schüler durch das Lehren von Heuristik vergrößert wird.

L I T E R A T U R

BALK, G.D.: Application of Heuristic Methods to the Study of Mathematics at School. Educational Studies in Mathematics 3 (1917) 133-146

FISCHER, R. - MALLE, G.: Fachdidaktik Mathematik, Lehrbrief für das Fernstudium "Pädagogik für Lehrer an Höheren Schulen", Klagenfurt 1978

KILPATRICK, J.: Analyzing the Solution of Verbal Problems: an Exploratory Study. Diss. Stanford 1967

PESCHEK, W.: Der Mathematikunterricht an den höheren Schulen Österreichs. Diss. Klagenfurt 1979

POLYA, G.: Schule des Denkens. Francke, Bern 1967

POLYA, G.: Mathematik und plausibles Schließen. Birkhäuser, Basel 1962

STEINHÖFEL, W. - REICHOLD, K.: Zur Verwendung von Handlungsanweisungen beim Beweisen mathematischer Sätze im Unterricht. In: Mathematik in der Schule 3 (1973)

TIETZE, U.P.: Heuristik - Überlegungen und Untersuchungen zu kognitiven Strategien im Mathematikunterricht. In: Mathematica didact. 1 (1978), Nr. 2

VAN DER WAERDEN, B.L.: Einfall und Überlegung. Beiträge zur Psychologie des mathematischen Denkens. Birkhäuser, Basel 1973. (Sonderdruck aus "Elemente der Mathematik" VIII/6, IX/1 und 3, XXV/4)

WEBB, N.L.: An Exploration of Mathematical Problem-Solving Processes. Diss. Stanford 1975

WICKELGREN, W.A.: How to Solve Problems. Freeman & Co., San Francisco 1974

ZIMMERMANN, B.: Problemlösen - einige empirische Ansätze in der Mathematikdidaktik. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Schroedel, Hannover 1977